Matemáticas 1 - **Parcial 2 - MA1111**

Resolución.

1. (4 ptos) Calcular los siguientes límites, si es que existen,

$$a.\quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

Solución : Al realizar la **sustitución ingenua** se obtiene

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{\left(\mathbf{1}\right)-1}{\sqrt{\left(\mathbf{1}\right)}-1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \longleftarrow \quad \textbf{Indeterminado.}$$

Levantamos la **indeterminación**, para ello, aplicamos la conjugada sobre la raíz del denominador

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(x-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)} \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(1\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\boldsymbol{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\boldsymbol{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{\left(\boldsymbol{x-1}\right)}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{\boldsymbol{x-1}}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\sqrt{x}+1\right) \overset{\text{S.I.}}{=} \sqrt{\left(\mathbf{1}\right)}+1 = 1+1 = 2.$$

Luego

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2 \quad \longleftarrow \quad \text{existe.}$$

★

1. (5 ptos) Calcular los siguientes límites, si es que existen,

$$b. \quad \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x \right)$$

Solución : Al realizar la **sustitución ingenua** se obtiene

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x \right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^2 \left(2 - x\right)} + x \right)$$

$$\overset{\text{S.I.}}{=} \sqrt[3]{\left(-\infty\right)^2 \left(2 - \left(-\infty\right)\right)} + \left(-\infty\right) = \sqrt[3]{\left(+\infty\right)\left(+\infty\right)} - \infty$$

$$= \sqrt[3]{+\infty} - \infty = +\infty - \infty \quad \longleftarrow \quad \textbf{Indeterminado.}$$

Levantamos la **indeterminación**, para ello, aplicamos la conjugada

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x \right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x \right) \frac{\left(\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} \right)^2 - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2 \right)}{\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} \right)^2 - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} \right)^3 + x^3}{\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} \right)^2 - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 - \boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{x^3}}{\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} \right)^2 - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 \cancel{- \boldsymbol{x^3}} + \cancel{\boldsymbol{x^3}}}{\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} \right)^2 - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{2x^2 - x^3} \right)^2 - x\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x^2},$$

observemos que, este límite presenta una **indeterminación** de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Levantamos la **indeterminación**, para ello, dividimos, cada término de la expresión, entre la mayor potencia presente en dicha expresión, en este caso, la mayor potencia es x^2.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}}{\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}\right)^2}{x^2}-\dfrac{x\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x^2}+\dfrac{x^2}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}{\left(\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x}\right)^2-\dfrac{x\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x\,x}+\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-x^3}{x^3}}\right)^2-\dfrac{\cancel{x}\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{\cancel{x}\,x}+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{x^3}-\dfrac{x^3}{x^3}}\right)^2-\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-x^3}}{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{x\,x^2}-\dfrac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}}\right)^2-\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-x^3}{x^3}}+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{2\cancel{x^2}}{x\cancel{x^2}}-1}\right)^2-\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{x^3}-\dfrac{x^3}{x^3}}+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}-1}\right)^2-\sqrt[3]{\dfrac{2x^2}{x\,x^2}-\dfrac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}}+1}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{2\cancel{x^2}}{x\cancel{x^2}}-1}+1}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1}$$

$$\overset{\text{S.I.}}{=} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{(-\infty)}-1}\right)^2 - \sqrt[3]{\frac{2}{(-\infty)}-1}+1}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{0-1}\right)^2 - \sqrt[3]{0-1}+1} = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{-1}\right)^2 - \sqrt[3]{-1}+1}$$

$$= \frac{2}{(-1)^2 - (-1)+1} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

Luego

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right) = \frac{2}{3} \qquad \longleftarrow \qquad \text{existe.}$$

★

1. (5 ptos) Calcular los siguientes límites, si es que existen,

$$c. \quad \lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2(x) - 5\cos(x) + 2}{2\cos(x) - 1}$$

Solución : Al realizar la **sustitución ingenua** se obtiene

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{2\cos^2 x - 5\cos x + 2}{2\cos x - 1} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{2\cos^2\left(\pi/3\right) - 5\cos\left(\pi/3\right) + 2}{2\cos\left(\pi/3\right) - 1}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{2} + 2}{\frac{2}{2} - 1}$$

$$= \frac{\frac{2}{4} - \frac{5}{2} + 2}{1 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2}{0} = \frac{\frac{1-5}{2} + 2}{0}$$

$$= \frac{\frac{-4}{2} + 2}{0} = \frac{-2+2}{0} = \frac{0}{0} \quad \longleftarrow \quad \textbf{Indeterminado.}$$

Levantamos la **indeterminación**, para ello, factorizamos la expresión del numerador,

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2,$$

por ser una expresión cuadrática, aplicamos la resolvente en variable $\cos x$ para $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{-5}$ y $\boldsymbol{c} = \mathbf{2}$

$$\cos x = \frac{-\left(-5\right) \pm \sqrt{\left(-5\right)^2 - 4\left(2\right)\left(2\right)}}{2\left(2\right)} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{5+3}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \\[2ex] \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Entonces, la expresión del numerador, $2\cos^2 x - 5\cos x + 2$, se factoriza como

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - 2\right),$$

el cual es equivalente a

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = \left(2\cos x - 1\right)\left(\cos x - 2\right).$$

Así,

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\cos^2 x-5\cos x+2}{2\cos x-1}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{\Big(\mathbf{2\cos x-1}\Big)\Big(\cos x-2\Big)}{\mathbf{2\cos x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\pi/3}\frac{\cancel{\Big(\mathbf{2\cos x-1}\Big)}\Big(\cos x-2\Big)}{\cancel{\mathbf{2\cos x-1}}}=\lim_{x\to\boldsymbol{\pi/3}}\Big(\cos x-2\Big)$$

$$\overset{\text{S.I.}}{=}\cos\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)-2=\frac{1}{2}-2=\frac{1-4}{2}=-\frac{3}{2}.$$

Luego

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\cos^2 x-5\cos x+2}{2\cos x-1}=-\frac{3}{2}\qquad\longleftarrow\qquad\text{existe.}$$

★

2. (5 ptos) Si f es una función que cumple con la siguiente relación

$$\frac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2} \leq f\left(x\right) \leq \frac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2},$$

hallar $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$.

Solución : Calculamos el límite cuando $x \to 0$ de las expresiones $\dfrac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2}$ y $\dfrac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2}$, es decir

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2}$$

- Para $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2}$. Al realizar la **sustitución ingenua** se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{1-\cos\left(3\left(0\right)\right)}{\left(0\right)^2} = \frac{1-\cos\left(0\right)}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \quad \longleftarrow \quad \textbf{Ind.}$$

Levantamos la **indeterminación**, para ello, multiplicamos y dividimos por

$$1+\cos\left(3x\right).$$

Así,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\left(3x\right)\right)}{x^2}\,\frac{\left(1+\cos\left(3x\right)\right)}{\left(1+\cos\left(3x\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1\right)^2-\left(\cos\left(3x\right)\right)^2}{x^2\left(1+\cos\left(3x\right)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2\left(3x\right)}{x^2\left(1+\cos\left(3x\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(3x\right)}{x^2\left(1+\cos\left(3x\right)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(3x\right)}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos\left(3x\right)}$$

$$\overset{?}{=} \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(3x\right)}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos\left(3x\right)}\right),$$

la última igualdad es válida siempre y cuando los límites existan.

Calculamos cada uno de los dos últimos límites

- Para $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(3x\right)}{x^2}$. Al realizar la **sustitución ingenua** se obtiene

$$\lim_{x\to \mathbf{0}} \frac{\operatorname{sen}^2\left(3x\right)}{x^2} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{\operatorname{sen}^2\left(3\left(\mathbf{0}\right)\right)}{\left(\mathbf{0}\right)^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\left(0\right)}{0} = \frac{0}{0} \quad \longleftarrow \quad \textbf{Indeterminado.}$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\left(3x\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x}\right)^2$$

la última igualdad es válida, ya que, la función elevar al cuadrado es una función continua.

Calculamos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x}$, para ello proponemos el cambio de variable

$$u = 3x, \qquad \text{de aquí,} \qquad x = \frac{u}{3},$$

así,

$$\text{si} \quad x \to 0, \quad \text{entonces} \quad u \to 3\left(0\right) = 0.$$

El límite nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{\frac{u}{3}} = \lim_{u\to 0} \frac{3 \operatorname{sen} u}{u} = 3 \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 3\left(\mathbf{1}\right) = 3,$$

es decir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x} = 3,$$

por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\left(3x\right)}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x}\right)^2 = \left(3\right)^2 = 9.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\left(3x\right)}{x^2} = 9.$$

- Para $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\cos\left(3x\right)}$. Al realizar la **sustitución ingenua** se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos\left(3x\right)} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{1}{1+\cos\left(3\left(0\right)\right)} = \frac{1}{1+\cos\left(0\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos\left(3x\right)} = \frac{1}{2}.$$

De aquí,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(3x\right)}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos\left(3x\right)}\right) = \left(9\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

- Para $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2}$. Al realizar la **sustitución ingenua** se obtiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{\tan^2\left(3\left(0\right)\right)}{2\left(0\right)^2} = \frac{\tan^2\left(0\right)}{0} = \frac{0}{0} \qquad \longleftarrow \qquad \textbf{Indeterminado.}$$

Levantamos la **indeterminación**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2\left(3x\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan\left(3x\right)}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(3x\right)}{x}\right)^2,$$

la última igualdad es válida, ya que la función elevar al cuadrado es una función continua.

Calculamos $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(3x\right)}{x}$. Tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(3x\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{\cos\left(3x\right)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x\cos\left(3x\right)}$$

$$\overset{?}{=} \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\left(3x\right)}\right),$$

la última igualdad es válida siempre y cuando los límites existan.

Calculamos cada uno de los dos últimos límites

– Para $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x}$. Este límite ya fué calculado y se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x} = 3.$$

– Para $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos\left(3x\right)}$. Al realizar la **sustitución ingenua** se obtiene

$$\lim_{x\to \mathbf{0}} \frac{1}{\cos\left(3x\right)} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{1}{\cos\left(3\left(\mathbf{0}\right)\right)} = \frac{1}{\cos\left(0\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos\left(3x\right)} = 1.$$

Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan\left(3x\right)}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(3x\right)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos\left(3x\right)}\right) = \left(3\right)\left(1\right) = 3.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan\left(3x\right)}{x} = 3.$$

De aquí,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\tan\left(3x\right)}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(3\right)^2 = \frac{1}{2}\left(9\right) = \frac{9}{2}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2} = \frac{9}{2}.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2} = \frac{9}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2} = \frac{9}{2},$$

como

$$\frac{1-\cos\left(3x\right)}{x^2} \leq f\left(x\right) \leq \frac{\tan^2\left(3x\right)}{2x^2},$$

por el Teorema del emparedado, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right) = \frac{9}{2}.$$

★

3. (5 ptos) Demostrar, usando la definición formal de límite, que

$$\lim_{x\to -2}\left(x^2-1\right)=3.$$

Demostración : Repasamos la definición formal de límite.

Es conocido que

$$\lim_{x\to \boldsymbol{x_0}} \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L},$$

significa que: Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta_\varepsilon>0$, tal que

$$\left|\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{L}\right|<\varepsilon, \qquad \text{siempre y cuando} \qquad 0<\left|x-\boldsymbol{x_0}\right|<\delta.$$

En nuestro caso

$$\left|\boldsymbol{x^2-1}-\left(\boldsymbol{3}\right)\right|<\varepsilon, \qquad \text{siempre y cuando} \qquad 0<\left|x-\left(\boldsymbol{-2}\right)\right|<\delta,$$

es decir

$$\left|\boldsymbol{x^2-1}-\boldsymbol{3}\right|<\varepsilon, \qquad \text{siempre y cuando} \qquad 0<\left|x+\boldsymbol{2}\right|<\delta,$$

así,

$$\left|x^2-1-\left(3\right)\right|=\left|x^2-4\right|=\left|\left(x-2\right)\left(x+2\right)\right|=\left|x-2\right|\left|x+2\right|.$$

Observe que, si se puede definir una constante positiva K, tal que

$$\left|x-2\right|<K,$$

entonces

$$\left|x-2\right|\left|x+\boldsymbol{2}\right|<K\left|x+\boldsymbol{2}\right|,$$

y de aquí, se podrá despejar $\left|x+\boldsymbol{2}\right|$.

Podemos definir ese número K si nos restringimos a valores x que pertenezcan algún intervalo centrado en $\boldsymbol{x_0}=\boldsymbol{-2}$.

Así, como, $0<\left|x+\boldsymbol{2}\right|<\delta$, entonces consideramos $\delta=1$, y se obtiene, para $x\neq -2$, que

$$\left|x+\boldsymbol{2}\right|<1 \qquad \Longrightarrow \qquad -1<x+2<1$$

$$\Longrightarrow \qquad -2-1<x<-2+1 \qquad \Longrightarrow \qquad -3<x<-1,$$

es decir, para $x\neq -2$, si

$$\left|x+2\right|<1, \qquad \text{entonces} \qquad -3<x<-1,$$

de aquí, vamos a construimos una cota para $\left|x-2\right|$, (el valor de K).

Entonces, a la desigualdad $-3 < x < -1$, restamos 2, la desigualdad no cambia

$$-3 < x < -1 \qquad \Longrightarrow \qquad -3 - 2 < x - 2 < -1 - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad -5 < x - 2 < -3,$$

puesto que, $-3 < 5$, entonces

$$-3 < x < -1 \qquad \Longrightarrow \qquad -5 < x - 2 < -3 < 5 \qquad \Longrightarrow \qquad -5 < x - 2 < 5,$$

es decir

$$\left| x - 2 \right| < 5.$$

Así, hemos construido una cota para $\left| x - 2 \right|$, (el valor de K), para el caso en que $\delta = 1$,

$$K = 5,$$

Con lo que,

$$\left| x^2 - 1 - \left(3\right) \right| = \left| x - 2 \right| \left| x + 2 \right| = 5 \left| x + 2 \right|,$$

como

$$\left| x^2 - 1 - \left(3\right) \right| < \varepsilon, \qquad \text{entonces} \qquad 5 \left| x + 2 \right| < \varepsilon,$$

despejando $\left| x + 2 \right|$, se tiene que

$$\left| x + 2 \right| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Tomando $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$, concluimos que

$$\left| x^2 - 1 - \left(3\right) \right| < \varepsilon, \qquad \text{siempre y cuando} \qquad 0 < \left| x + 2 \right| < \delta.$$

Verificación formal : Dado $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$. Entonces

$$0 < \left| x + 2 \right| < \delta, \qquad \text{que es equivalente a} \qquad 0 < \left| x + 2 \right| < \frac{\varepsilon}{5},$$

implica que

$$\left| x^2 - 1 - \left(3\right) \right| = \left| x^2 - 4 \right| = \left| \left(x - 2\right)\left(x + 2\right) \right| = \left| x - 2 \right| \left| x + 2 \right|$$

$$< 5 \left| x + 2 \right| < 5\,\delta = 5 \left(\frac{\varepsilon}{5}\right) = \varepsilon.$$

Luego

$$\lim_{x \to -2} \left(x^2 - 1\right) = 3 \qquad \longleftarrow \qquad \text{existe.}$$

★

4. (7 ptos en total) Considere la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si } \quad x \leq 1 \\ \\ \sqrt[3]{2x-1} & \text{si } \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) (3 puntos) Estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

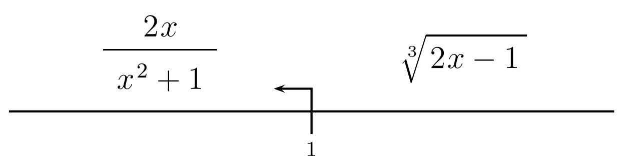
Solución : Es conocido que, una función f es continua en un punto $x = x_0$ si se cumplen cada una de las siguientes condiciones

(a) $f(x_0)$ existe, es decir, el punto x_0 pertenece al dominio de la función.

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ existe y es finito.

(c) $f(x_0) = L$, es decir, el valor de la función en el punto x_0 es igual al valor del límite cuando x se aproxima a x_0.

Entonces, tenemos



Estudiamos la continuidad para todo $x \in \mathbb{R}$

(a) Estudiamos la continuidad en el intervalo $\left(-\infty, 1\right)$.

Es conocido que, las funciones racionales (cociente de polinomios) son continuas, excepto, en aquellos valores que anulen al denominador, buscamos los valores donde

$$q() = x^2 + 1 = 0,$$

para ello, aplicamos la resolvente para $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{c} = \mathbf{1}$

$$x = \frac{-\left(0\right) \pm \sqrt{\left(0\right)^2 - 4\left(1\right)\left(1\right)}}{2\left(1\right)} = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} \longleftarrow \boxed{\text{Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.}}$$

Por lo tanto, $q(x) = x^2 + 1$, **NO** tiene raíces reales, es **irreducible**.

Así, el denominado nunca es igual a cero, con lo que concluimos que la función f es continua para todo $x \in \left(-\infty, 1\right)$.

(b) Estudiemos la continuidad en $x_0 = 1$, para ello verificamos las tres condiciones

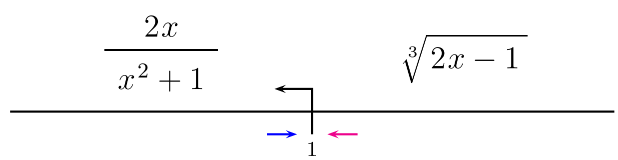
i. Para $f\left(1\right)$: Observamos que, la función f está definida en $x_0 = 1$, y corresponde a la expresión $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, por lo que

$$f\left(1\right) = \frac{2\left(1\right)}{\left(1\right)^2 + 1} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1,$$

es decir,

$$\boxed{f\left(1\right) = 1 \qquad \leftarrow \qquad \text{existe.}}$$

ii. Para calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, observemos que, por la naturaleza de la función f, debemos utilizar los límites laterales



- **Límite lateral izquierdo.** Cuando x se aproxima a $x_0 = 0$ por la izquierda, se tiene

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2+1} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{2\left(1\right)}{\left(1\right)^2+1} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1,$$

es decir,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

- **Límite lateral derecho.** Cuando x se aproxima a $x_0 = 0$ por la derecha, se tiene

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt[3]{2x-1} \overset{\text{S.I.}}{=} \sqrt[3]{2\left(1\right)-1} = \sqrt[3]{2-1} = \sqrt[3]{1} = 1,$$

es decir,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.$$

Como, los límites laterales son iguales,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x),$$

entonces

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \qquad \leftarrow \qquad \text{existe.}}$$

iii. Tenemos que, el valor obtenido en la parte (4(b)i) es igual al valor del límite obtenido en la parte (4(b)ii), es decir
$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1.$$

Puesto que, se cumple las tres condiciones de la definición de continuidad, concluimos que la función f es **continua** en $x_0 = 1$.

(c) Estudiamos la continuidad en el intervalo $\left(1, +\infty\right)$.

Es conocido que, las funciones compuestas son continuas siempre y cuando las funciones involucradas en la composición sean continuas.

Observemos que
$$f(x) = \sqrt[3]{2x-1}\,,$$
para $x \in \left(1, +\infty\right)$, es la composición de las funciones
$$f_1(x) = \sqrt[3]{x} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = 2x - 1,$$
ya que
$$f(x) = \left(f_1 \circ f_2\right)(x)\,.$$

Puesto que, las funciones f_1 y f_2 son continuas para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular, si $x \in \left(1, +\infty\right)$, concluimos que f es continua para todo $x \in \left(1, +\infty\right)$.

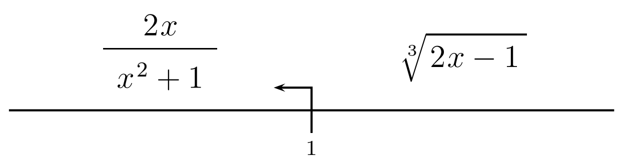
Finalmente, la función
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \\ \sqrt[3]{2x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
es continua en $\mathbb{R}$. ★

4. (7 ptos en total) Considere la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \leq 1 \\[2ex] \sqrt[3]{2x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(b) (4 puntos) Calcule la derivada por definición para f en $x = 1$.

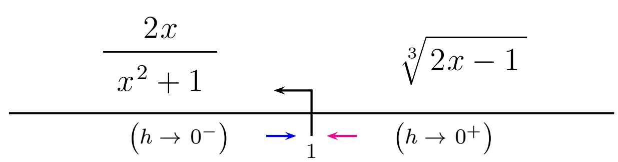
Solución : Tenemos que,



Por definición de derivada, debemos calcular

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Por la naturaleza de la función estudiamos los límites laterales



- **Límite lateral izquierdo.** Cuando h se aproxima a cero por la izquierda, se tiene, al realizar la **sustitución ingenua**, que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{f\left(1+(0)\right) - f(1)}{(0)} = \frac{f(1) - f(1)}{0} = \frac{0}{0} \quad \longleftarrow \quad \textbf{Ind.}$$

Levantamos la **indeterminación**

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{2(1+h)}{(1+h)^2+1} - \dfrac{2(1)}{(1)^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{2+2h}{(1+h)^2+1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{2+2h-\left((1+h)^2+1\right)}{(1+h)^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2+2h-\left(1+2h+h^2+1\right)}{h\left(\left(1+h\right)^2+1\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2+2h-\left(2+2h+h^2\right)}{h\left(\left(1+h\right)^2+1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2+2h-2-2h-h^2}{h\left(\left(1+h\right)^2+1\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{2}+\cancel{2h}\cancel{-2}\cancel{-2h}-h^2}{h\left(\left(1+h\right)^2+1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-hh}{h\left(\left(1+h\right)^2+1\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\left(1+h\right)^2+1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{\left(1+h\right)^2+1} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{-\left(0\right)}{\left(1+\left(0\right)\right)^2+1} = \frac{0}{\left(1\right)^2+1} = \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

es decir,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h} = 0.$$

- **Límite lateral derecho.** Cuando h se aproxima a cero por la derecha, se tiene, al realizar la **sustitución ingenua**, que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{f\left(1+\left(0\right)\right)-f\left(1\right)}{\left(0\right)} = \frac{f\left(1\right)-f\left(1\right)}{0} = \frac{0}{0} \quad \longleftarrow \quad \textbf{Ind.}$$

Levantamos la **indeterminación**

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f\left(1+h\right)-f\left(1\right)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{2\left(1+h\right)-1} - \dfrac{2\left(1\right)}{\left(1\right)^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{2+2h-1}-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+2h}-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\sqrt[3]{1+2h}-1\right)}{h} \frac{\left(\left(\sqrt[3]{1+2h}\right)^2+\sqrt[3]{1+2h}+1\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{1+2h}\right)^2+\sqrt[3]{1+2h}+1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\sqrt[3]{1+2h}\right)^3 - \left(1\right)^3}{h\left(\left(\sqrt[3]{1+2h}\right)^2 + \sqrt[3]{1+2h} + 1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathbf{1} + 2h \mathbf{- 1}}{h\left(\left(\sqrt[3]{1+2h}\right)^2 + \sqrt[3]{1+2h} + 1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{\mathbf{1}} + 2h \cancel{\mathbf{- 1}}}{h\left(\left(\sqrt[3]{1+2h}\right)^2 + \sqrt[3]{1+2h} + 1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{h}\left(\left(\sqrt[3]{1+2h}\right)^2 + \sqrt[3]{1+2h} + 1\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\cancel{\boldsymbol{h}}}{\cancel{\boldsymbol{h}}\left(\left(\sqrt[3]{1+2h}\right)^2 + \sqrt[3]{1+2h} + 1\right)}$$

$$= \lim_{h\to \mathbf{0^+}} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+2h}\right)^2 + \sqrt[3]{1+2h} + 1}$$

$$\stackrel{\text{S.I.}}{=} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+2\left(\mathbf{0}\right)}\right)^2 + \sqrt[3]{1+2\left(\mathbf{0}\right)} + 1}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1+0}\right)^2 + \sqrt[3]{1+0} + 1} = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2 + \sqrt[3]{1} + 1}$$

$$= \frac{2}{\left(1\right)^2 + 1 + 1} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

es decir,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f\left(1+h\right) - f\left(1\right)}{h} = \frac{2}{3}.$$

Como, los límites laterales son diferentes,

$$0 = \lim_{h \to 0^-} \frac{f\left(1+h\right) - f\left(1\right)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{f\left(1+h\right) - f\left(1\right)}{h} = \frac{2}{3},$$

concluimos que

$$f'\left(1\right) \qquad \textbf{NO EXISTE}.$$

★

5. (4 ptos) Demuestre que $x + 2\cos x$ tiene al menos una raíz real.

Demostración : Demostrar que, $x+2\cos x$ tiene al menos una raíz real, es equivalente a demostrar que la ecuación

$$x + 2\cos x = 0$$

tiene al menos una solución real, es decir, debemos encontrar, al menos, una raíz de la ecuación en $\mathbb{R}$.

Consideremos la función

$$f(x) = x + 2\cos x,$$

así, debemos demostrar que existe, al menos, un valor c en $\mathbb{R}$, tal que, $f(c) = 0$.

Observemos que, la función f es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo $\left[-\pi, 0\right]$, ya que, f es la suma de dos funciones continuas, además

$$f\left(-\pi\right) = \left(-\pi\right) + 2\cos\left(-\pi\right) = -\pi - 2, \qquad \text{y} \qquad f\left(0\right) = \left(0\right) + 2\cos\left(0\right) = 2,$$

así,

$$f\left(-\pi\right) = -\pi - 2 < 0 < 2 = f\left(0\right),$$

por el **Teorema del Valor Intermedio**, existe un valor c en el intervalo $\left[0, 1\right]$, tal que, $f(c) = 0$, luego, la ecuación

$$x + 2\cos x = 0 \qquad \text{tiene una solución en} \qquad \left[-\pi, 0\right]$$

y por ende, en $\mathbb{R}$. ★